ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Nguyễn Sơn Hải

MỘT SỐ VẤN ĐỀ MỚI TRONG HÌNH ARBELOS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Nguyễn Sơn Hải

MỘT SỐ VẤN ĐỀ MỚI TRONG HÌNH ARBELOS

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2019

Danh mục hình

Mục lục

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11B (2017 - 2019) Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 5 năm 2019
Người viết Luận văn

Nguyễn Sơn Hải

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Điểm, đường thẳng, tam giác, đa giác, đường tròn,...là những đối tượng nghiên cứu cơ bản của Hình học Euclid phẳng. Với chủ ý tìm hiểu về đường tròn, chuỗi các đường tròn cùng các vấn đề khác trong hình học phẳng, tôi muốn nghiên cứu tìm hiểu sâu thêm về một số vấn đề mới được phát hiện trong hình arbelos. Đó là những kết quả hình học mới, chưa được giới thiệu trong các sách hình học ở Việt nam. Ở nước ngoài, trong nhiều Tạp chí, chẳng hạn Tạp chí Toán học của Đại học Florida Atlatic Hoa kỳ (Forum Geometricorum, ISSN 1534-1178), nhiều tác giả đã nghiên cứu và khai thác khá sâu sắc về các vấn đề này. Các bài báo về hình arbelos được đăng thường xuyên trong những năm gần đây. Đó là lý do tôi chọn đề tài.

Mục đích chính của đề tài là:

- Tìm hiểu và trình bày các vấn đề trong hình arbelos (hình con dao của thợ đóng giầy): đặc trưng của arbelos vàng, các hướng tổng quát hóa đường tròn Archimedes, chuỗi các đường tròn Pappus và một số đồng nhất thức. Những vấn đề này được đề cập đến trong các bài báo từ năm 2004 trở lại đây.

- Sử dụng các công cụ và các phương pháp hình học như: Dựng hình bằng com pa-thước kẻ, phép nghịch đảo, tọa độ Descartes, tọa độ Barycentric để giải quyết các bài toán. Các phương pháp tiếp cận hình arbelos thời Archimedes bằng công cụ hiện đại mang lại nhiều kết quả đẹp và có ích.

- Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo những học sinh có tư duy tốt về Hình học.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Trình bày một số bài toán trong hình arbelos, đặc biệt các kết quả mới về arbelos vàng (tham khảo trong [3] và chi tiết hóa), giới thiệu một số tính chất của đường tròn Archimedes (tham khảo trong [7]), một số hướng tổng quát để tìm họ các đường tròn Archimedes (tổng hợp từ các bài báo [4], [2], [5]), trình bày chuỗi Pappus các đường tròn trong hình arbelos và một số đồng nhất thức. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

Chương 1. Hình arbelos và các cặp đường tròn Archimedes

Hình arbelos dựa trên hình cơ bản tạo bởi 3 nửa đường tròn (α, β, γ), còn được gọi là "hình con dao thợ đóng giầy". Chúng tôi giới thiệu một số sự kiện cơ bản trong hình học này, kết quả mới về arbelos vàng, cách dựng các cặp đường tròn Archimedes và đường tròn nội tiếp arbelos. Chương này bao gồm:

1.1. Giới thiệu về arbelos

1.2. Kết quả mới về arbelos vàng

1.3. Đường tròn nội tiếp arbelos

1.4. Các cặp đường tròn Archimedes

Chương 2. Một số họ đường tròn Archimedes

Chương này trình bày các cách tổng quát hóa để thu được một số họ đường tròn Archimedes. Nội dung bao gồm các mục sau:

2.1. Họ đường tròn Archimedes của T. Schoch

2.2. Các đường tròn Archimedes của P.Woo

2.3. Tổng quát hóa kiểu Power

2.4. Đặc trưng của các đường tròn Archimedes đi qua gốc tọa độ.

Chương 3. Chuỗi các đường tròn nội tiếp hình arbelos

Bằng công cụ tọa độ hoặc phép nghịch đảo, chương này giới thiệu một số chuỗi đường tròn nội tiếp trong arbelos. Từ các công thức tính bán kính các đường tròn của chuỗi có thể lập được một số đồng nhất thức liên quan đến dãy số tự nhiên.

3.1. Chuỗi Pappus các đường tròn nội tiếp arbelos

3.2. Ba chuỗi Pappus các đường tròn nội tiếp arbelos

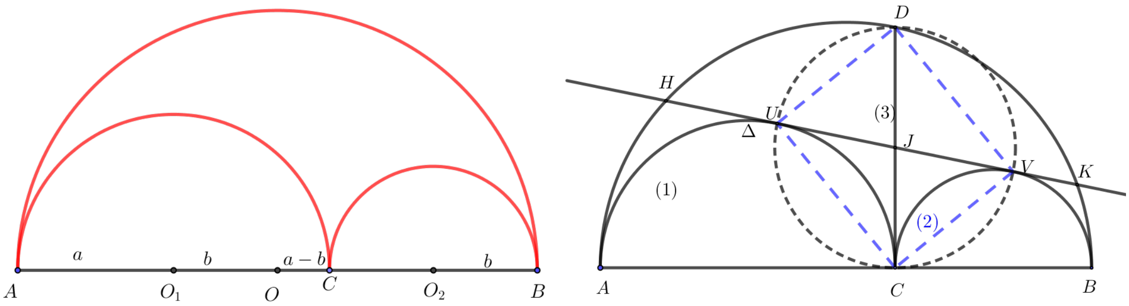
3.3. Một số đồng nhất thức

Chương 1

Hình arbelos và các cặp đường tròn Archimedes

1.1 Giới thiệu về arbelos

Hình arbelos nghiên cứu các nửa đường tròn tiếp xúc, chữ "arbelos" được ghép từ 7 chữ cái $\alpha, \varrho, \beta, \eta, \lambda, \theta, \varsigma$ thành $(\alpha\varrho\beta\eta\lambda\theta\varsigma)$. Trên đoạn thẳng AB ta lấy điểm C và dựng các nửa đường tròn đường kính AC, BC, AB, ta gọi đó là các nửa đường tròn $O_1(a), O_2(b)$ và $O(a+b)$ tương ứng. Nếu ta cắt hai nửa hình tròn nhỏ ra khỏi nửa hình tròn lớn thì ta nhận được hình "con dao của thợ đóng giầy" hay còn gọi là hình arbelos của Archimedes. Trong luận văn này chúng tôi thống nhất dùng



(a) Hình "con dao của thợ đóng giầy" (b) $S_{(1)} + S_{(2)} = S_{(3)}$

Hình 1.1: Arbelos-"hình con dao thợ đóng giầy"

tên gọi "arbelos $[ABC]$" để chỉ hình cơ bản như trên hình vẽ 1.1, bán kính hai nửa đường tròn nhỏ là $AC = a, CB = b, O_1, O_2$ là hai tâm nửa đường tròn, C là tiếp điểm của hai nửa đường tròn nhỏ, D là giao của nửa đường tròn lớn nhất với đường vuông góc $Ct \perp AB$. Như vậy đường tròn lớn có bán kính $a+b$. Ta cũng dùng ký hiệu (PQ) để chỉ nửa đường tròn đường kính PQ hay $O(r)$ để chỉ đường tròn tâm O, bán kính r. Nhà toán học và thiên văn học Archimedes đã khám phá ra nhiều định lý về arbelos và công bố trong cuốn sách "Sách về các bổ đề" của ông. Mặc dù các bài toán trong hình arbelos đã có từ thời đó nhưng đến tận ngày nay người ta vẫn phát hiện ra nhiều bí ẩn, nhiều kết quả đã được công bố trong các diễn đàn toán học mà điển hình là Forum Geometricorum (ISSN 1534-1178). Đây là một tạp chí khoa học về hình học Euclide của khoa toán trường đại học Florida Atlantic (Mỹ). Tạp chí được thành lập bởi giáo sư Paul Yiu từ năm 2001 và ông cũng là tổng biên tập của tạp chí này cho đến nay. Trong hình arbelos có một số kết quả sau đã được phát biểu và trình bày phép chứng minh trong [1]:

Bài toán 1.1. *Cho arbelos $[ABC]$ như trên hình 1.1 b). Chứng minh diện tích của hình arbelos bằng diện tích của hình tròn đường kính CD và bằng $2\pi ab$.*

Bài toán 1.2. *Trong arbelos $[ABC]$ gọi $U = AD \cap (AC)$ và $V = BD \cap (BC)$ thì tứ giác $CUDV$ là hình chữ nhật.*

Bài toán 1.3. *Giả thiết như bài toán trên, khi đó đường thẳng UV là tiếp tuyến của hai nửa đường tròn (AC) và (CB).*

1.2 Kết quả mới về arbelos vàng

Năm 1999 có một bài báo mang tên *Those ubiquitious Archimedes circles* công bố trong Math. Mag. 72 (1999) của tập thể tác giả: C.W. Dodge, T. Schoch, P.Y. Woo, P. Yiu. Bài báo đã làm cho các nhà toán học chuyên và không chuyên quan tâm đến hình arbelos này. Ở thế kỷ hiện tại có khá nhiều các cuộc thảo luận về arbelos mà đa số trong chúng được công bố trong tác phẩm "The arbelos: A cosmos made by three semicircles" (Arbelos: *một vũ trụ được tạo bởi ba nửa đường tròn*) của hai nhà toán học H. Okumura và M. Watanabe (Nhật bản). Tác phẩm đó được đăng trong tạp chí Iwanami Shoten năm 2010 bằng Tiếng Nhật. Sau đây là một phát hiện rất hay của Hiroshi Okumura: *Một đặc trưng của arbelos vàng*, [6].

Với hình arbelos $[ABC]$, giả sử a, b là bán kính các nửa đường tròn $(AC), (CB)$ với $a > b > 0$. a, b được gọi là "ở trong tỷ số vàng" nếu

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \tag{1.1}$$